連続講座

断層映像法の基礎　第17回
MRI再構成画像へのノイズの影響

篠原　広行[1)]・坂口　和也[1)]・今江　禄一[1)]・薄葉　大輔[1)]
橋本　雄幸[2)]

[1)] 東京都立保健科学大学　放射線学科
[2)] 横浜創英短期大学　情報処理学科

はじめに

今までの解説やシミュレーションの中では、ノイズなどの変動成分については無視して純粋な信号について解説し、シミュレーションを行ってきた。

今回は、MRIの画像再構成において計測データに混入するノイズがどのように影響するかを検証する。そのために計測データに混入するノイズの性質についてまとめる。次に、計測データとノイズの関係を明らかにし、そのノイズが計測データに混入した場合、再構成法の違いによってどのように影響するかを解説する。はじめに2次元フーリエ変換法での影響を見て、次に投影再構成法での影響を見て、両者を比較する。

1. ノイズの性質
2. 計測データとノイズ
3. 2次元フーリエ変換法でのノイズの影響
4. 投影再構成法でのノイズの影響

1. ノイズの性質

実験上の計測データには、望まれる信号の他にその信号とは相関のない望まれない信号が必ず含まれる。MRIの計測データにも例外なく望まれない信号が含まれてくる。その望まれない信号のことをノイズと呼んでいるが、このノイズは予測のつかないランダムな信号となっている。このランダム信号は、数学的にはランダム変数として記述される。ランダム変数の値は、サンプル点に対し一定値を与えず、絶えず変動する。その様子を**図1**に示す。このようなランダム変数を性格付けるためには、確率と統計の考え方を持ち込む必要がある。

ランダム変数は、多くのサンプルを取った場合、確率密度関数（PDF; probability density function）という形で表現することができる。ランダム変数の確率密度関数p(x)は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1 \tag{1}$$

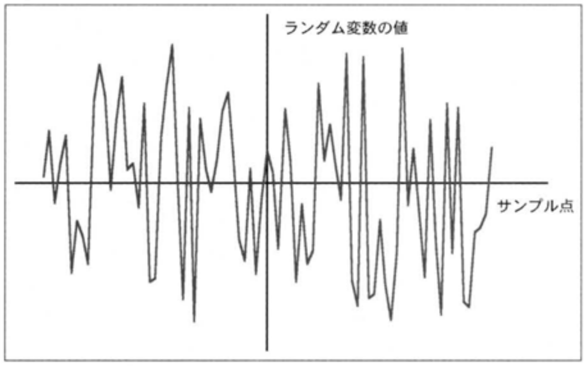
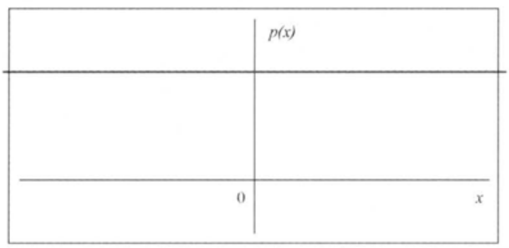
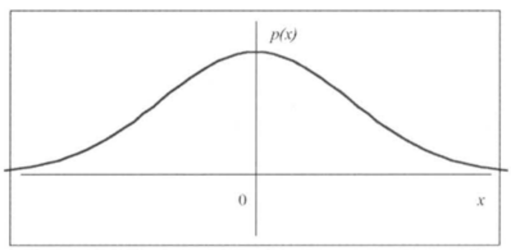


図1　ランダム変数の値
サンプル点に対して、どんな値になるか予測がつかないようになっている。



(a)　確率密度関数が一定の値を持つ関数の形をとる場合のグラフ。



(b)　確率密度関数がガウス関数の形をとる場合のグラフ。

図2　ランダム変数の確率密度関数の例

別刷請求先：〒116-8551 東京都荒川区東尾久7-2-10　東京都立保健科学大学 保健科学部放射線学科　篠原広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406

という関係がある。この確率密度関数p(x)は、様々な形をとる。代表的な形には、一様ノイズに相当する一定の値を持つ関数や、ガウス型ノイズに相当するガウス関数などがある。その形を**図2(a)**と**(b)**に示す。

計測において、この確率密度関数の形が必ずしも分かっているとは限らない。この場合、統計量の中で最も基本となる平均値（期待値）と分散または標準偏差を用いてランダム変数の性質を表す。平均値は、すべてのデータの値の和をデータの個数で割った値である。正確には算術平均と呼び、サンプルの総数をn、i番目のサンプルの値をx_iとしたとき、平均値を数式で表すと、

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{2}$$

となる。ランダム変数Xの確率密度関数をp(x)として、p(x)を用いて平均値（この場合、期待値と呼ぶことが多いが）を表すと、

$$\bar{x}=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \tag{3}$$

となり、離散的な表現にすると、

$$\bar{x}=E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_ip(x_i) \tag{4}$$

となる。分散は、平均値からの偏差を2乗した値をすべて加え、その平均をとった値である。数式で表すと、

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} \tag{5}$$

となる。確率密度関数を用いて表すと、

$$\sigma_x^2=var(X)=E\{(x-\bar{X})(x-\bar{X})^*\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{X})^2p(x)dx \tag{6}$$

となり、離散的な表現にすると、

$$\sigma_x^2=var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2p(x_i) \tag{7}$$

となる。標準偏差は、分散の平方根をとった値である。式で表すと、

$$s=\sqrt{V} \tag{8}$$

または、

$$\sigma_x=\sqrt{var(X)} \tag{9}$$

となる。

確率密度関数がx_1とx_2の間で一定の値を持つ関数であると仮定すると、

$$p(x)=\frac{1}{x_2-x_1} \tag{10}$$

となる。ここで、$x_2>x_1$とする。このときの平均値と標準偏差を求めると、

$$\bar{X}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x}{x_2-x_1}dx=\frac{x_1+x_2}{2} \tag{11}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\int_{x_1}^{x_2}(x-\frac{x_1+x_2}{2})^2\frac{1}{x_2-x_1}dx}=\frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}} \tag{12}$$

となる。また、ガウス型の場合、その確率密度関数は、

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

となる。ここで、μは平均値でσは標準偏差である。

2つの異なるランダム変数の間には、2つの重要な関係がある。1つは統計的に独立であることで、もう1つは相関がない（無相関である）ことである。統計的に独立であるとき、ランダム変数X_1の確率が$p_1(x_1)$でランダム変数X_2の確率が$p_2(x_2)$、両者が同時に起こる確率が$p_{12}(x_1,x_2)$とすると、それぞれの関係は、

$$p_{12}(x_1,x_2)=p_1(x_1)p_2(x_2) \tag{14}$$

となる。また、ランダム変数X_1とX_2の相関係数をc_{12}とすると

$$c_{12}=\frac{E\{(x_1-\bar{X}_1)(x_2-\bar{X}_2)\}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{15}$$

となる。ここで、$\bar{X}_1$と$\bar{X}_2$はそれぞれの期待値で、σ_1とσ_2はそれぞれの標準偏差である。
両者が統計的に独立であるとき、相関係数c_{12}は(14)式を用いると、

$$\begin{aligned}c_{12}&=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{X}_1)(x_2-\bar{X}_2)^*p_{12}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{X}_1)p_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}(x_2-\bar{X}_2)^*p_2(x_2)dx_2\\&=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}(X_1-\bar{X}_1)(X_2-\bar{X}_2)^*\\&=0\end{aligned} \tag{16}$$

となり、相関係数がゼロとなる。相関係数がゼロとなるので、両者は無相関となる。

2. 計測データとノイズ

計測データに混入するノイズは、平均値がゼロで、標準偏差xを持つランダム変数となる。式で表すと平均値は、

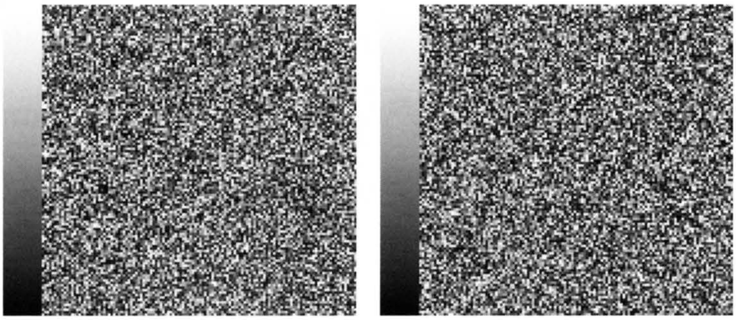
$$E(X)=0 \tag{17}$$

となり、分散は、

$$var(X)=\sigma_x^2 \tag{18}$$

となる。

このノイズ成分Xは信号に加算的に混入する。計測データをSとして信号成分をxとすると、



(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ

図3 ノイズ成分のみの計測データ

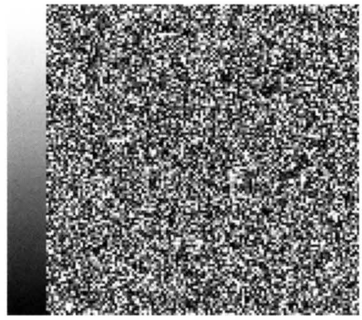
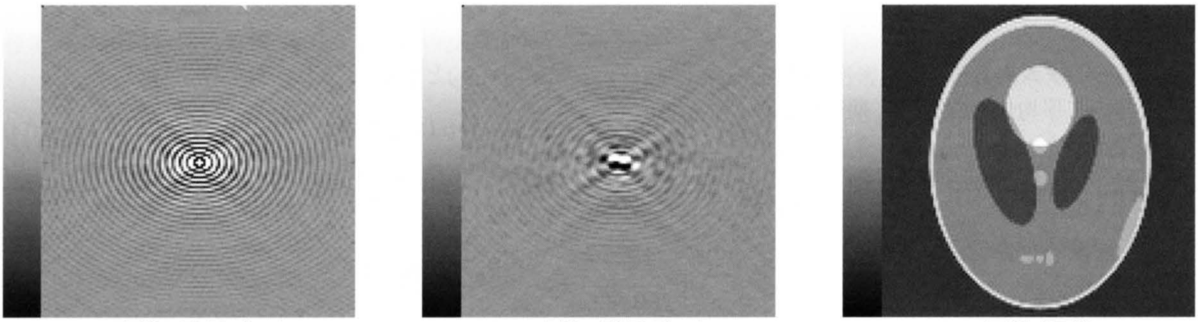


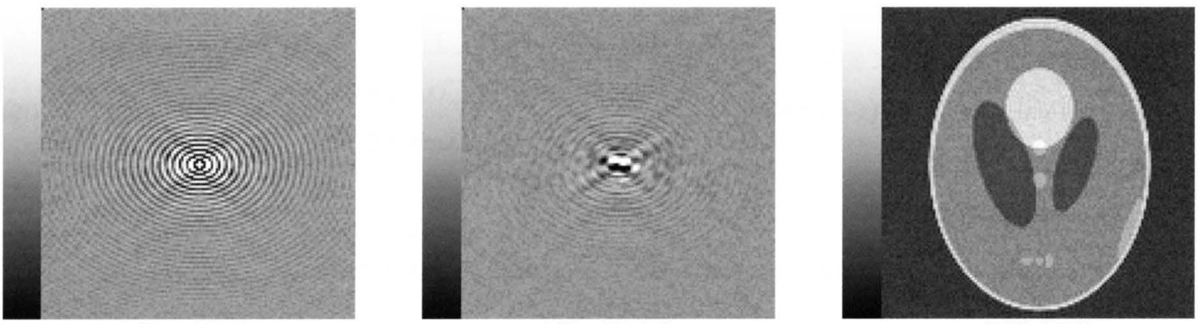
図4 2次元フーリエ変換法でノイズ成分を再構成した画像

図3の実部と虚部のデータから2次元フーリエ逆変換を用いて再構成している。



(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ (c) 再構成画像

図5 2次元フーリエ変換法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/100000 (50dB) のノイズ成分を加えた計測データとその計測データから2次元フーリエ逆変換で再構成した画像



(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ (c) 再構成画像

図6 2次元フーリエ変換法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/10000 (40dB) のノイズ成分を加えた計測データとその計測データから2次元フーリエ逆変換で再構成した画像

$$S=x+X \tag{19}$$

と表すことができる。この(19)式にランダム変数の性質を用いると計測数Nと信号ノイズ比S/Nの関係を導くことができる。1回の計測のS/Nは、

$$(S/N)_1=\frac{|x|}{\sigma_x} \tag{20}$$

となる。N回計測して平均をとった場合、

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x+X_i)=x+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i \tag{21}$$

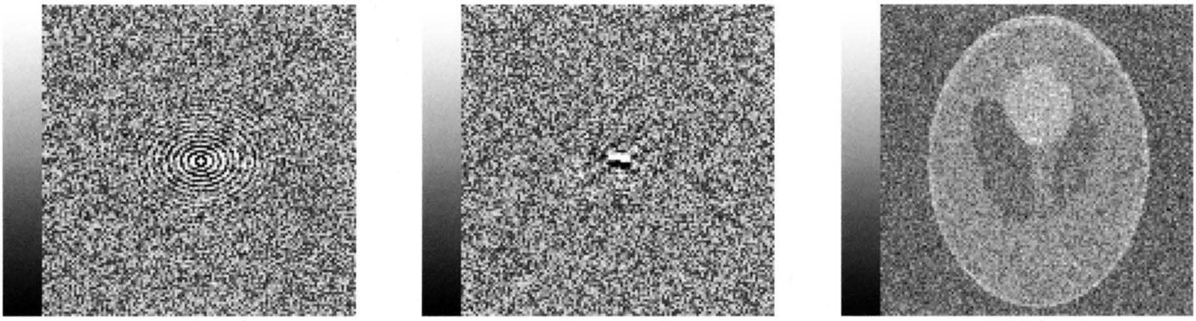


図7 2次元フーリエ変換法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/1000（30dB）のノイズ成分を加えた計測データとその計測データから2次元フーリエ逆変換で再構成した画像

となり、この場合のS/Nは、

$$(S/N)_N=\frac{|x|}{\sqrt{\mathrm{var}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i)}}=\sqrt{N}\frac{|x|}{\sigma_x}=\sqrt{N}(S/N)_1 \tag{22}$$

となる。よって、N回計測すると、$\sqrt{N}$倍S/Nが良くなる。

3. 2次元フーリエ変換法でのノイズの影響

信号をゼロとして、ノイズ成分のみで128×128の計測データを作成した画像を**図3(a), (b)**に示す。**図3(a)**は実部の計測データで**図3(b)**は虚部の計測データを表している。両者とも同じようにランダム変数を用いてノイズ成分を作成している。ランダム変数には一定の値を持つ確率密度関数を用いている。平均をゼロ、標準偏差を1とするために、一定値の幅は$\pm\sqrt{3}$としている。この計測データから実際に実部と虚部の平均値μ_a, μ_bと標準偏差σ_a, σ_bをそれぞれ求めると、

$\mu_a=0.002325$,　$\mu_b=-0.002045$

$\sigma_a=1.002654$,　$\sigma_b=1.001224$

となる。平均値がゼロ、標準偏差が1に近い値になっている。

このデータをもとに、2次元フーリエ変換法でノイズ成分のみを再構成する。2次元フーリエ変換法では、計測データを2次元フーリエ逆変換することによって再構成が行われる。再構成を行った画像を**図4**に示す。この再構成画像の平均値μ_Iと標準偏差σ_Iを求めると、

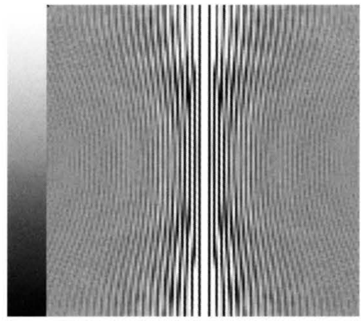
$\mu_I=0.000004$

$\sigma_I=0.007849$

となる。この結果より、再構成しても平均値はほぼゼロであることが分かる。また、標準偏差は、2次元フーリエ逆変換の定義により、

$$X_I[u,v]=\frac{1}{N^2}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1}\sum_{m=-N/2}^{N/2-1}X[m,n]e^{i2\pi(um+vn)/N^2} \tag{23}$$

図8 投影再構成法でノイズ成分を再構成した画像
図3の実部と虚部のデータにおいて横軸を動径方向、縦軸を角度方向のデータと見なし、フィルタ補正逆投影法で再構成している。

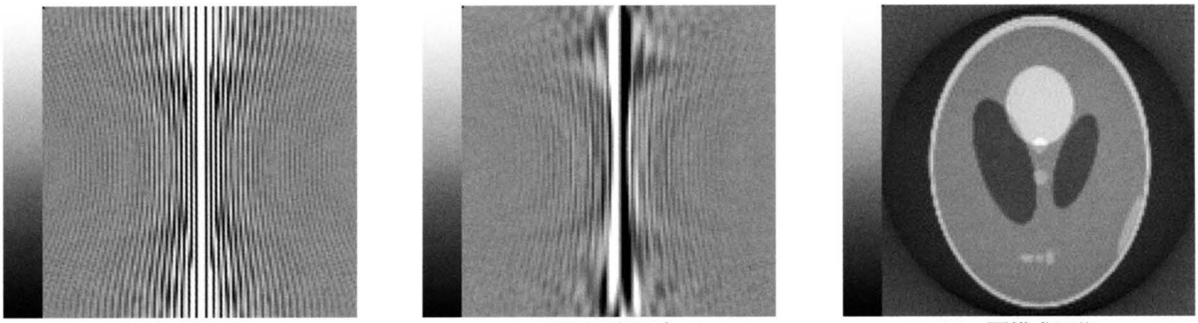


となり、ランダム変数の性質から分散は

$$\sigma_I^2=\frac{1}{N^2}\sigma^2 \tag{24}$$

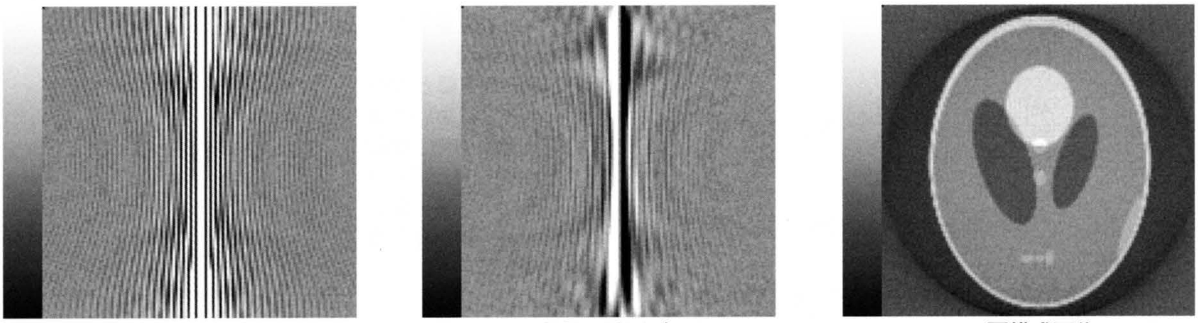
となる。よって標準偏差は、1/N倍となるので、1/128＝0.0078125に近い値になっている。

次に、このノイズを数値ファントムの信号に加えた場合、その再構成画像がどのようになるかをシミュレーションする。ノイズの標準偏差の値を計測データの最大値の1/100000にして加えた実部と虚部の計測データとその計測データから2次元フーリエ逆変換で再構成した画像をそれぞれ**図5(a)〜(c)**に示す。ノイズレベルの単位は、dB（デシベル）を用いるが、dBで表すとこのノイズレベルは50dBとなる。このノイズレベルでは、ほとんどノイズの影響は見られない。計測データの最大値の1/10000（40dB）のノイズを加えた計測データとその計測データから再構成した画像を**図6(a)〜(c)**に示す。このノイズレベルでは、ノイズが多少目立ってきている。最後に計測データの最大値の1/1000（30dB）のノイズを加えた計測データとその計測データから再構成した画像を**図7(a)〜(c)**に示す。



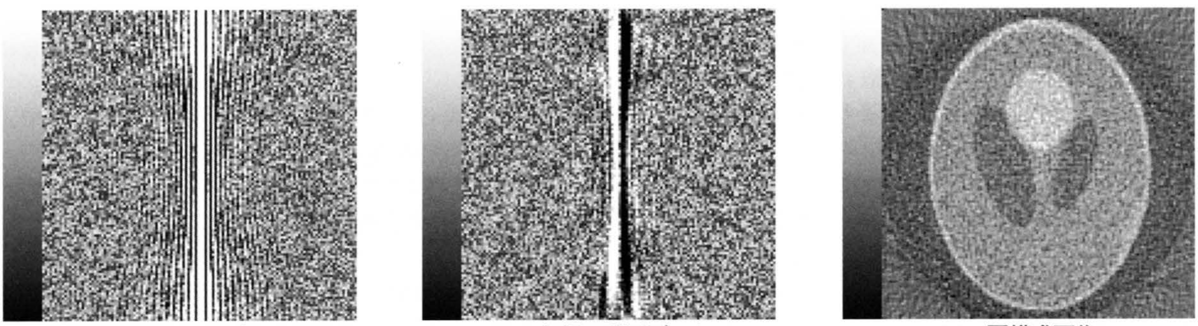
(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ (c) 再構成画像

図9 投影再構成法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/100000（50dB）のノイズ成分を加えた計測データとその計測データからフィルタ補正逆投影法で再構成した画像



(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ (c) 再構成画像

図10 投影再構成法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/10000（40dB）のノイズ成分を加えた計測データとその計測データからフィルタ補正逆投影法で再構成した画像



(a) 実部の計測データ (b) 虚部の計測データ (c) 再構成画像

図11 投影再構成法の数値ファントムの信号に信号の最大値の1/1000（30dB）のノイズ成分を加えた計測データとその計測データからフィルタ補正逆投影法で再構成した画像

このノイズレベルでは、かなりノイズが目立っている。

4. 投影再構成法でのノイズの影響

2次元フーリエ変換法と同じ計測データを用いて、投影再構成法で再構成する。投影再構成法では、フィルタ補正逆投影をすることによって再構成が行われる。再構成を行った画像を**図5**に示す。この再構成画像の平均値μ_Iと標準偏差σ_Iを求めると、

μ_{I} =0.000052

σ_{I} =0.004769

となる。この結果より、投影再構成法でも再構成したノイズ画像の平均値はほぼゼロであることが分かる。また、標準偏差は若干ではあるが2次元フーリエ変換法よりも小さくなっている。画像を見ると、四隅の辺りにフィルタ補正逆投影法における特徴的なアーチファクトが生じている。これは、投影再構成法では画像に内接する円内領域でデータがとられるので、その外側には元々のデータがないのでアーチファクトが生じてしまう。また、データのサンプル点を2次元フーリエ変換法と等しくした場合、データを取得する領域が小さい分だけノイズに対して有利になり、再構成画像の標準偏差が若干小さくなる。

次に、このノイズを数値ファントムの信号に加えた場合のシミュレーションを行う。ノイズレベルは、2次元フーリエ変換法と同様とする。ノイズレベルを50dBにした計測データとフィルタ補正逆投影法で再構成した画像を**図9(a)～(c)**に示す。また、ノイズレベル40dBにした計測データと再構成した画像を**図10(a)～(c)**に示す。最後にノイズレベルを30dBにした計測データと再構成した画像を**図11(a)～(c)**に示す。各ノイズレベルでのノイズの影響は2次元フーリエ変換法とほぼ同じ傾向を見せるが、数値ファントム上でのノイズの大きさは2次元フーリエ変換法に比べると若干小さくなっている。

謝辞：本稿で使用したプログラムの開発は、東京都立保健科学大学特定プロジェクト研究「生体内可視化技術に関する教育研究支援プログラムの開発」によるものである。