

連続講座

断層映像法の基礎 第4回
投影定理篠原 広行¹⁾ 杉本 英治²⁾¹⁾東京都立保健科学大学 放射線学科²⁾昭和大学藤が丘病院 放射線科

はじめに

第3回では被写体の断面の領域を矩形としその領域内の物理量を一定、領域外では零としたモデルの投影について説明した。このモデルではデータを収集する角度が0、30、45、60、90度のように変化すると、投影の強度分布は矩形、台形、三角形、台形、矩形となる。第3回の図4、5は計算により求めたが、これらはグラフ用紙と2つの定規を準備すれば作図から求めることが可能である。本稿では、はじめに矩形モデルの投影を作図する。つぎにこのモデルを利用し断層映像法の基本原理である投影定理について述べる。投影定理とは、第2回の図15に示したように

「被写体の2次元フーリエ変換の角度 θ 方向の成分は、 θ 方向における投影の1次元フーリエ変換に等しい。」

というものである。映像対象の被写体の内部がわかっているならば(すなわち物理量の分布が既知であれば)、もちろんその2次元フーリエ変換を計算することは可能である。断層映像法は内部が未知の被写体に対し、対外計測したデータをもとにそれを画像化(可視化)する技術である。ここで大切なことは被写体が未知でもその2次元フーリエ変換が何らかの方法により得られれば、それをフーリエ逆変換すれば被写体となることである。そして、被写体の2次元フーリエ変換を得る方法が投影定理に他ならない。

投影定理を説明するにあたり以下の1~5が必要になるが、2次元矩形関数のフーリエ変換は2の1次元矩形関数のフーリエ変換とほとんど同じである。したがって、2の計算(本質的にはcosine関数の定積分)を一度経験しておけば、放射線医学において最も重要な定理の一つである投影定理を理解することができる。極限を求めるのに利用するマクローリン展開は、sine関数、cosine関数、指数関数などを x 、 x^2 、 x^3 、 \dots など x のべき乗の和によって表すものである。マクローリン展

開は以下の式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

を説明するために導入するが、通常、(1)式は公式として使用されるので実際に投影定理を理解するのに必要な項目は1~4である。少し数式が出てくるが基本はcosine関数の不定積分がsine関数になることを知っていれば十分である。

1. 矩形関数の投影(第2回、(21)式、第3回、(2)式)
2. 1次元矩形関数のフーリエ変換(第1回、(11)式)
3. 2次元矩形関数の表し方(第2回、(20)式)
4. 2次元矩形関数のフーリエ変換
5. マクローリン展開

1. 定規と電卓による矩形の投影の作成

図1のように被写体の断面を矩形としその中に一様な物理量が満たされている矩形モデルを考える。ここでは物理量として放射性同位元素(RI)の濃度を想定しその濃度を A Bq/cm²とする。さらに、ガンマ線の吸収がないものと仮定する。A4サイズのグラフ用紙と2つの定規を準備し、グラフ上に矩形を描き被写体の断面とする。 (x,y) を被写体に固定した座標系、 (s,t) を被写体の回りに回転する座標系とする。ここで s は検出器の位置を表し t は検出器に垂直な被写体の座標を表す。 s 軸が x 軸となす角度(同じことであるが t 軸が y 軸となす角度)を θ とすれば、 θ 方向の投影は $p(s, \theta)$ と表される。検出器の回転半径を10 cmとし矩形の中心から10cmの距離に、定規の1つ(定規1とする)を検出器にみためて置く。もう一方の定規2を定規1に垂直に置く。検出器が理想的な分解能をもつと仮定すると、計数値のデータはこの垂線に沿って収集されることになる。その計数値はRIから由来するので、垂線上のRIを求めればそれが計数値となる。それには、定規

0度の投影

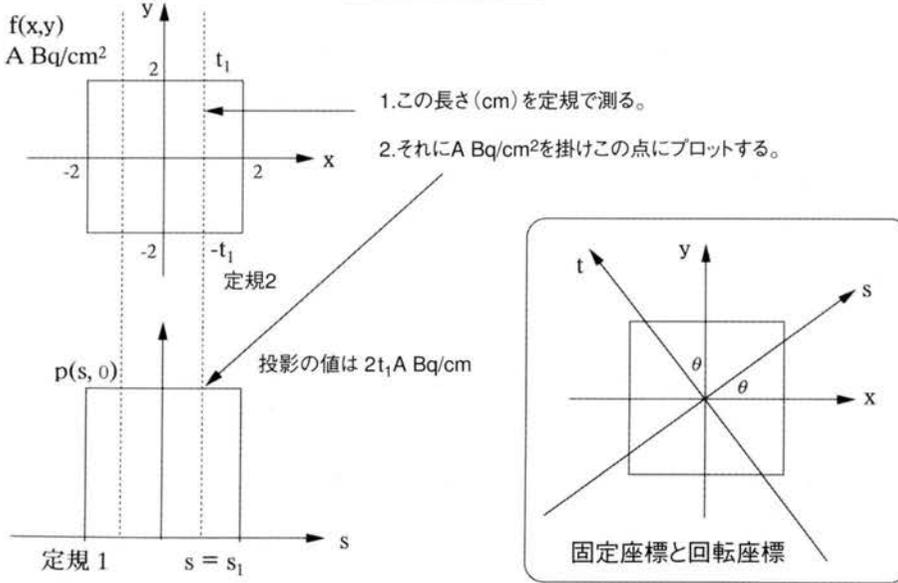


図1 矩形の0度方向への投影

2が矩形を横切る座標 $-t_1, t_1$ から長さ $2t_1$ がわかるのでそれに $A \text{ Bq/cm}^2$ を掛ければよい。図1の場合 $2t_1=4\text{cm}$ なので $2t_1$ 上のRIは $A \text{ Bq/cm}^2 \times 4\text{cm} = 4A \text{ Bq/cm}$ である。簡単のため $A=1$ とすれば 4Bq/cm となるから定規1から4cmのところプロットすると、定規2を置いた位置 $s = s_1$ における投影を得たことになる。これらが終了したならば定規2を横に少し移動し同じ操作を繰り返すと、 $\theta=0$ 度ときの投影 $p(s, 0)$ が得られる。これは $f(x, y)$ を y 軸に平行な直線に沿って積分したものである、第3回の(2)式と同じく $p(x)$ とも表される。同様に $\theta=90$ 度ときの投影は $f(x, y)$ を x 軸に沿って積分するので $p(s, 90)$ は $p(y)$ と同じである。矩形の投影の作り方をまとめると図2ようになる。

図3は投影角度が37度の場合の投影、図4は45度の場合の投影である。実線は矩形の中心と検出器の中心を結んでいるので、その距離は角度が変わってもいつも10cmである。図5のようにいろいろな角度について投影を作成するとSPECTあるいはX線CTらしくなってくる。ここでは簡単のため被写体と投影を平面図で描いているが、第2回の図15のように投影を立体的に描く表示法もある。被写体の断面が円でその中が一樣濃度のRIによって満たされている場合も、矩形の場合と同じく投影を図6のように求めることができる。

X線CTの場合の測定データは透過強度を I 、入射

定規と電卓による投影の作り方

1. グラフ用紙に x 軸を設定し、原点を中心に1辺が4cmの矩形を描く
2. 原点から10cmの距離に検出器があるとし、そこに定規1を置き横線を引く。この位置を0度方向の投影 $p(s, 0)$ とする。ここで s は検出器の位置を表す。
3. 定規2を定規1に垂直に置き、定規2が矩形を横切る座標 $(-t_1, t_1)$ を求め垂線の長さ $2t_1$ を測る。0度方向の投影の場合はこの長さは4cm。
4. その長さに $A\text{Bq/cm}^2$ を掛けた値が定規2を置いた位置 $(s=s_1)$ における投影の値である。 $A=1$ のとき投影の値は高さ4cmの点になる。
5. 定規2を横に移動し同じ操作を繰り返すことにより、矩形の強度分布をもつ投影 $p(s, 0)$ が得られる。
6. 検出器が矩形の回りに角度 θ 回転した場合の投影 $p(s, \theta)$ も、同様な操作により描くことができる。

図2 矩形の投影の作図法

強度を I_0 とすると I_0 / I の自然対数 $(\ln I_0 / I)$ が線減弱係数の積分に直接関係するのでこれが投影である。ガンマ線の吸収がないと仮定し得た図1、3などの投影は物理量を線減弱係数に置き換えればX線CTに、水素原子濃度に置き換えればMRにもあてはまる。

2. 矩形内の領域で一定の値をもつ2次元関数のフーリエ変換

空間座標を(x,y)とし点(x,y)における2次元関数をf(x,y)と表す。一般にはf(x,y)はxとyによっていろいろな値をとる。図1のようにf(x,y)が原点を中心とする1辺の長さが2a = 4 cmの矩形の領域で一定の値Aをもつとき、f(x,y)は以下のように表される。

$$f(x,y) = \begin{cases} A & |x| \leq a, |y| \leq a \\ 0 & |x| > a, |y| > a \end{cases}$$

f(x,y)の2次元フーリエ変換

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

において、x およびyがそれぞれ -a~a の範囲のとき f(x,y) = Aなので

$$F(u,v) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a Ae^{i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

と表せる。定数Aを積分の外に出すとxとyの2重積分は、それぞれxに関する指数関数の積分とyに関する指数関数の積分の積になる。

$$F(u,v) = A \int_{-a}^a e^{-i2\pi ux} dx \int_{-a}^a e^{-i2\pi vy} dy$$

これらの積分は第2回の(11)式と同じように偶関数のcosine関数の部分のみ零でない値をもち、虚数iを含むsine関数の部分は奇関数のため零になる。cosine関数の積分はsine関数であるから

$$\begin{aligned} F(u,v) &= A \left[\frac{\sin(2\pi ux)}{2\pi u} \right]_{-a}^a \left[\frac{\sin(2\pi vy)}{2\pi v} \right]_{-a}^a \\ &= A \left[\frac{\sin(2\pi ua) - \sin(2\pi u(-a))}{2\pi u} \right] \left[\frac{\sin(2\pi va) - \sin(2\pi v(-a))}{2\pi v} \right] \\ &= \frac{4Aa^2 \sin(2\pi au)}{2\pi au} \cdot \frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av} \end{aligned} \quad (2)$$

検出器を図1と同じようにx軸に平行に置いたときの投影を0度方向の投影とすれば、x軸への投影p(x)が0度方向の投影となる。これはf(x,y) = Aをyについて積分したものである。

$$p(x) = A \int_{-a}^a f(x,y) dy = A \int_{-a}^a dy = 2Aa \quad (3)$$

(3)式のフーリエ変換は2Aaが定数なので以下のようにになる。

$$p(u) = \frac{4Aa^2 \sin(2\pi au)}{2\pi au} \quad (4)$$

(2)式においてvを0に近づけると第2項は0/0の不定形になるが、sin xはマクローリン展開を用いると

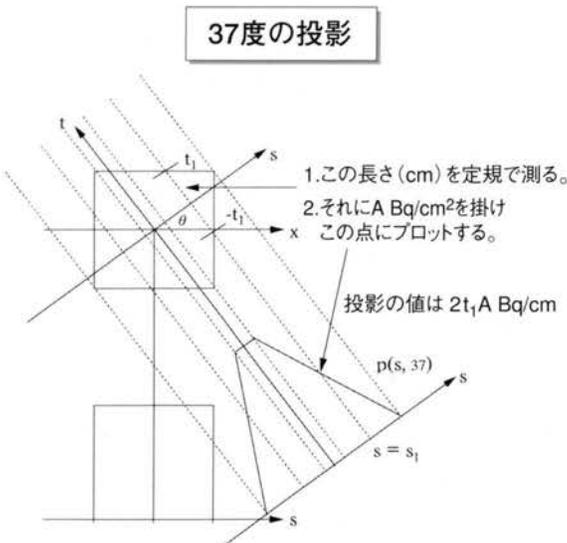


図3 矩形の37度方向への投影

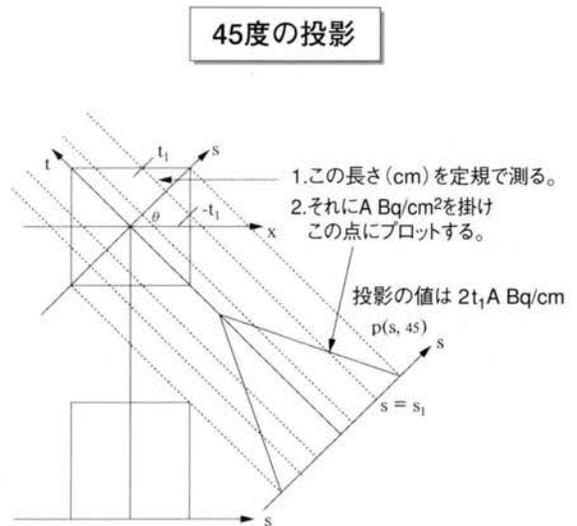


図4 矩形の45度方向への投影

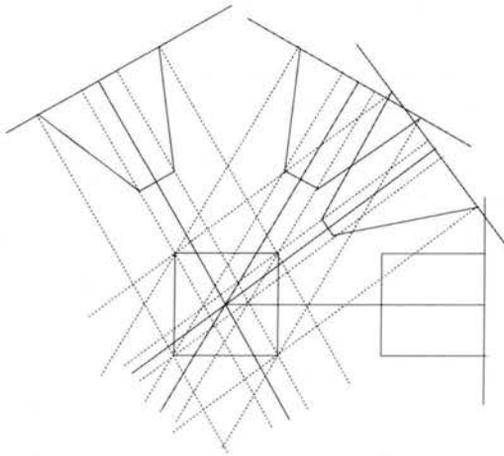


図5 矩形のいろいろな方向への投影

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1} \quad (5)$$

のように表されるので(1)式が成り立つ。図8(a)は $y = \sin x$ のグラフと $y=x$ のグラフを重ねて表示したものである。2つの関数は $x = 0$ のときいずれも0になるが、(2)に示すように $\sin x/x$ のグラフは $x=0$ のとき1になる。実際、(5)式の x を $x=2\pi av$ と置き

$$\frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av} = \frac{1}{2\pi av} \left(\frac{2\pi av}{1!} - \frac{(2\pi av)^3}{3!} + \frac{(2\pi av)^5}{5!} - \dots \right)$$

v を0に近づけると

$$\frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av} = 1$$

よって、 $F(u,v)$ において $v=0$ と置いた $F(u,0)$ は

$$F(u,0) = \frac{4Aa^2 \sin(2\pi au)}{2\pi au} \quad (6)$$

これは(4)式の $P(u)$ と同じものである。すなわち x 軸への投影 $p(x)$ の1次元フーリエ変換 $P(u)$ は $f(x,y)$ の2次元フーリエ変換 $F(u,v)$ の $v=0$ の成分 $F(u,0)$ に等しい。この関係は任意の投影角度について成り立つので、図3の $\theta=37$ 度方向への投影のフーリエ変換は $F(u,v)$ の原点を通過して u 軸と37度の方向の成分

円の投影

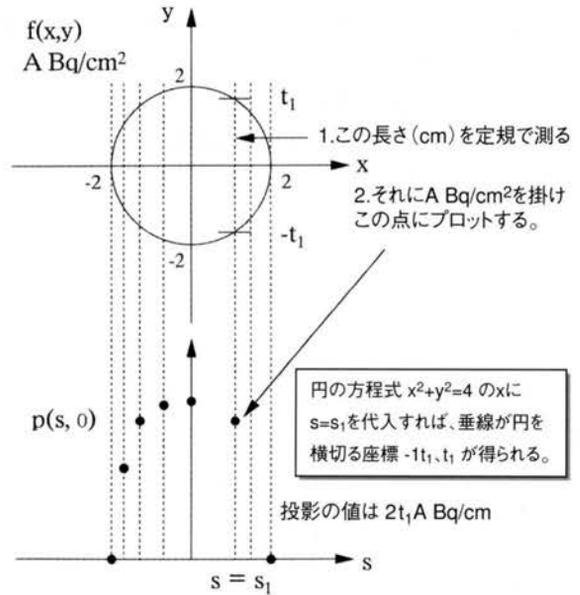


図6 円の投影の作図法

を与える。図4の $\theta=45$ 度方向への投影のフーリエ変換は $F(u,v)$ の原点を通過して u 軸と45度の方向の成分を与える。このように検出器を被写体 $f(x,y)$ の回りに360度回転し角度ごとに投影を収集し、その1次元フーリエ変換を求めれば $f(x,y)$ の2次元フーリエ変換が得られる。それを逆変換すれば被写体の断面を画像化することができる。

図8(a)は 128×128 マトリクスの $(65,65)$ を原点として $a=8$ 画素の矩形画像 (x,y) を示す(白い領域が値1、矩形以外の黒い領域は値0)。(b)はその2次元フーリエ変換 $F(u,v)$ である。第1回の図15-dと異なって見えるのは矩形の1辺の長さが異なる他、図15-dでは高い周波数まで見えるように低い周波数の振幅(振幅の定義は第2回(9)式を参照)を頭打ちにして表示しているのに対し、(b)はすべての振幅を表示しているためである。こうすると高い周波数の振幅は低い周波数の振幅に比較的小さいため見えなくなる。(c)は(a)の矩形画像を四角柱のように3次元的に表示したもので四角柱の高さが A に相当する。(d)は $F(u,v)$ の振幅を3次元的に表示したものであり、(e)は $F(u,0)$ の実数部を示す。虚数部は零のため表示していない。(f)は(b)や(d)の $F(u,0)$ の振幅を示す。

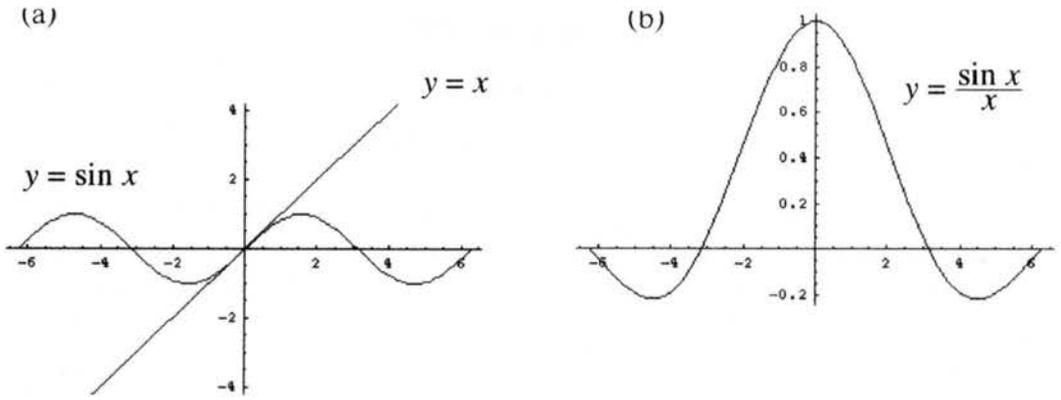


図7 (a) $y = \sin x$ と $y = x$ のグラフ、(b) $y = \frac{\sin x}{x}$ のグラフ

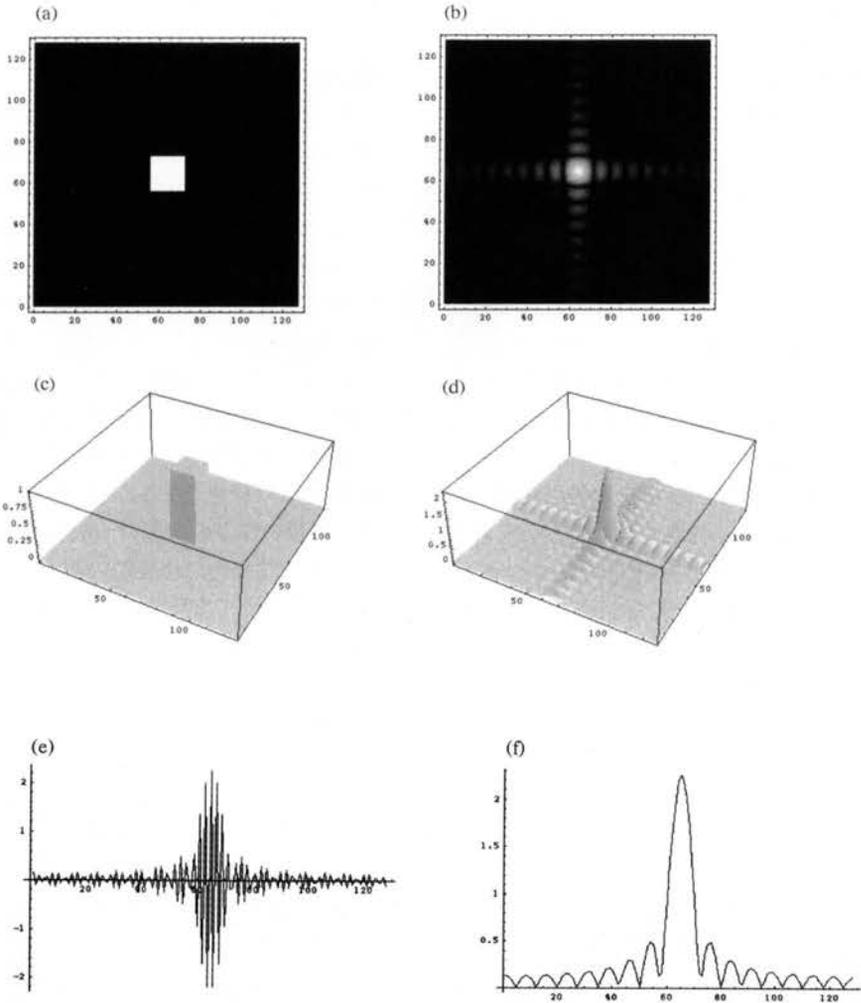


図8 (a) 矩形画像 $f(x,y)$ 、(b) 矩形画像の2次元フーリエ変換 $F(u,v)$ の振幅、(c) $F(x,y)$ の3次元表示、(d) $F(u,v)$ の振幅の3次元表示、(e) $F(u,0)$ の実数部(虚数部は零)、(f) $F(u,0)$ の振幅

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的の複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会

〒107-0052 東京都港区赤坂 9-6-41 乃木坂ビル 3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619