連続講座

断層映像法の基礎　第3回
投影と線積分

篠原　広行　杉本　英治
昭和大学藤が丘病院放射線科

はじめに

第1、2回では、画像再構成の基礎となる投影定理に進むのに必要なフーリエ変換について説明した。投影定理を確かめるのに一番よい方法は、2次元関数のフーリエ変換とその投影の1次元フーリエ変換を計算し、両者の関係を調べることである。それには、いずれのフーリエ変換も比較的容易（大学1年で習う微分積分学程度）に計算できる2次元関数を選ぶとわかりやすい。最もわかりやすいのは、被写体の断面の領域を矩形としその領域内の物理量を一定、領域外では零としたモデルである。こうすると、この2次元関数のフーリエ変換はsine関数やcosine関数の積分に帰着できる。また、その投影についても同様である。他に、投影定理を確認するのによいのは、被写体の断面の領域を円としその領域内の物理量を一定、領域外では零としたモデルである。このモデルは、水を満たした円柱ファントムをX線CTやMRにより撮像する場合や、放射性同位元素の水溶液を満たした円柱ファントムをSPECTあるいはPETにより撮像する場合に担当する。

本稿では、被写体の断面の物理量を表す2次元関数f(x,y)から、任意の方向への投影を計算する。これは映像装置による測定データの収集を、定規と電卓により模擬実験（シミュレーション実験）するもので、画像再構成を理解するのに役立つ。本稿で作成した投影をもとに、実際に投影定理を確認することは第4回において行う。

投影と線積分

投影と線積分について、以下では第2回と同様に映像装置としてSPECTをとりあげる。この場合の映像対象の物理量は放射性同位元素（RI）濃度であり、求めたいのは断面内の濃度分布である。測定データはSPECTによって検出される、単位画素あたりの計数値（計数密度）である。この測定データをもとに、元のRI濃度分布f(x,y)を得るのがSPECTの画像再構成である。投影とは画像再構成に用いるデータであり、f(x,y)を検出器に垂直な方向に沿って積分したものである。このように、ある直線に沿ってf(x,y)を積分することを線積分という。

SPECTは**図1**のように被写体の回りをガンマカメラが回転しデータ収集する。厚さが無視できる1スライス面から放出されるガンマ線のみに着目すると、そのデータは1次元の計数密度分布である。通常、RI濃度は単位容積中の放射能（Bq/cm^3）で表されるが、ここでは厚さを考えない無限少のスライス厚を想定する。それ故、濃度は単位面積あたりの放射能で単位はBq/cm^{2}である。RI濃度A Bq/cm^{2}のとき、被写体によるガンマ線の吸収がないと仮定してその計数密度分布がどうなるか考える。

スライス面を(x,y)平面で表すと、平面上のRI分布はそれに垂直方向に座標(x,y)で決まる値なのでf(x,y)と書ける。**図2**のように1辺が20cmの矩形内のRI濃度が一様な被写体において、y軸に平行な幅$\triangle x$=1cmの長方形の帯に着目する。$\triangle x$=1cmの幅の中に含ま

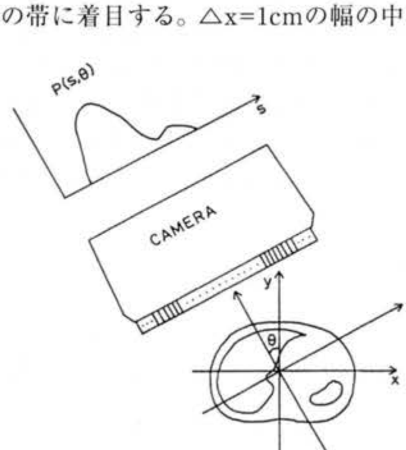


図1　SPECTの投影データ

別刷請求先：〒116-8551 東京都荒川区東尾久7-2-10　東京都立保健科学大学 保健科学部放射線学科　篠原　広行
Tel：03-3819-1211　Fax：03-3819-1406

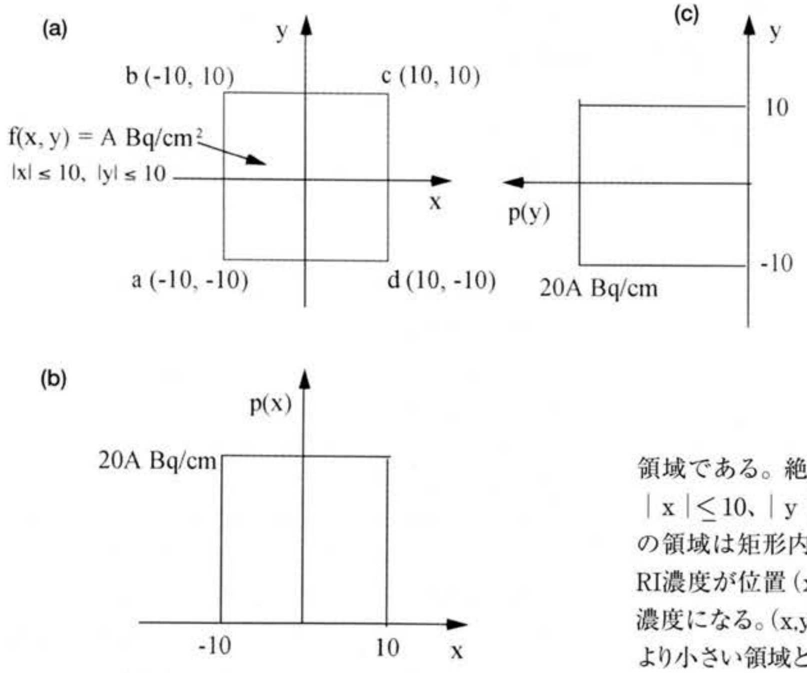


図2　矩形のスライス面(a)とその0度(b)および90度(c)方向への投影

れるRIは濃度A Bq/cm²に長方形の長さ20cmを掛けたA Bq/cm²×20cm=20A Bq/cmである。これをx軸に平行な直線に対してプロットすれば、xの変化に伴いどう変わるかを表す1次元の関数p(x)となる。この場合、p(x)は1cm間隔ですべてその値は20A Bq/cmであるから(**b**)のようになる。(**a**)と同じ矩形になるが、(**a**)は2次元平面上の点(x,y)のRI濃度f(x,y)を表すのに対し、(**b**)は変数が横軸のxのみの1つで、縦軸はyではなくxの単位長さあたりの放射能p(x)である。p(x)内のRIは1cmあたりの放射能20A　Bq/cmを横幅20cmにわたって加算したものだから、20A Bq/cm×20cm=400A Bqである。一方、(**a**)のf(x,y)内のRIは濃度がA Bq/cm²、面積が20×20cm²だからA Bq/cm²×400cm²=400A Bqである。以上のことから、2次元平面図上のf(x,y)内のRIは、それをyについて積分した1次元関数p(x)内のRIに等しい。これをf(x,y)のx軸への投影という。

(a)は矩形内で一様な濃度A Bq/cm²、矩形外にはRIが存在しない。位置(x,y)での濃度f(x,y)を式で表すと

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=A \quad |x|\leq 10 \quad |y|\leq 10 \\
f(x,y)&=0 \quad |x|>10 \quad |y|>10
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

図3の(x,y)座標で、-10≦x≦10は直線x=-10とx=10の間の領域、-10≦y≦10は直線y=-10とy=10の間の領域である。絶対値記号を用いるとx,yはそれぞれ｜x｜≦10、｜y｜≦10でこれらをともに満たす平面上の領域は矩形内である。f(x,y)=Aはその矩形内のRI濃度が位置(x,y)に無関係にA Bq/cm²の一様RI濃度になる。(x,y)座標でx<-10、x>10は直線x=-10より小さい領域とx=10より大きな領域である。同様に、y<-10、y>10は直線y=-10より小さい領域とy=10より大きな領域でこれらをともに満たすのは矩形以外の領域である。f(x,y)=0はその濃度が0であることを示し、(**1**)**式**は一様な濃度の矩形からなる2次元の被写体を表す。

図2(**b**)を得るのにxについて幅1cmの帯を考えたが、この幅をさらに小さく0.5、0.1…としていくと、あるx座標を持つy軸に平行な直線上のf(x,y)の累和（順々にたして和を求めること）になる。例えば、x=-5のとき直線x=-5上のf(x,y)は

$$f(-5, y)$$

x=0のとき、直線x=0(y軸そのもの)上のf(x,y)はyの範囲が｜y｜≦10だから1cm間隔(△y=1cm)で

$$f(0, y)$$

y=-10〜10まで変えるとf(-5,y)は

$$f(-5,-10)、f(-5,-9)、f(-5,-8)、\cdots f(-5,0)、\cdots f(-5,9)、f(-5,10)$$

これら隣接する項の間には連続してRIが存在する。そこで、f(-5,-10)とf(-5,-9)の間のRIはf(-5,-10)にyの間隔△yを掛け

$$f(-5,-10)\triangle y$$

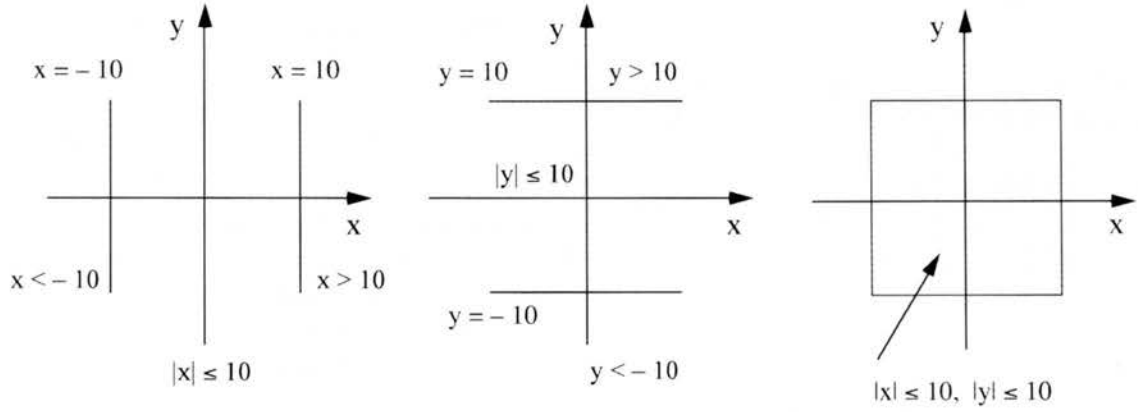


図3 平面上の領域の表し方

同様に、f(-5,-9)とf(-5,-8)の間のRIは

$$f(-5,-9)\triangle y$$

f(-5,9)とf(-5,10)の間のRIは

$$f(-5,9)\triangle y$$

そして、これらの直線上でf(x,y)の累和は以下の和を意味する。

$$f(-5,-10)\triangle y+f(-5,-9)\triangle y+\cdots f(-5,-0)\triangle y+\cdots f(-5,9)\triangle y$$

Σ記号を用いれば

$$\sum_{i=1}^{20} f(-5,y_i)\triangle y$$

ここで、y_i=-10+(i-1)、i=1～20とする。Σ記号はy_iのiを1～20まで変えて累和をとることである。△yを1cm間隔よりさらに小さくしてdyにすると上式は積分になる。

$$\int_{-10}^{10} f(-5,y)\,dy$$

これはf(x,y)を直線x=-5上で累和したものである。y軸に平行な直線上の累和は-5のところをxで置き換え

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

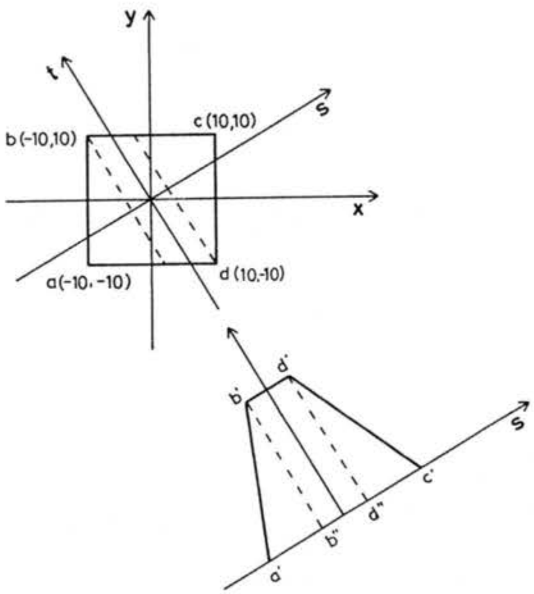
y_1、y_2はx軸に平行な直線が矩形と交わる点の座標でyの積分範囲を表す。注意することは、2次元上のRI分布f(x,y)をyについて累和した結果はx軸上にどのくらいRIがあるかを示す1次元関数p(x)になることである。SPECTでは64×64あるいは128×128マトリクスでデータ収集するが、その1スライスに着目するとp(x)が投影ということになる。投影p(x)とはガンマカメラに垂直な直線上にあるRI分布f(x,y)をyについて累和したものである。

2次元関数f(x,y)のx軸への投影p(x)

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad (2)$$

組織によるガンマ線の吸収がないとすれば、先に調べたようにf(x,y)内のRIはp(x)内のRIに等しい。このことをx軸に平行な直線上の投影だけでなく、x軸と30度、45度をなす直線上の投影についても調べてみよう。**図4**のx軸と30度をなす直線をsとすればs上の投影は、これに垂直な直線がf(x,y)を横切る長さにRI濃度A Bq/cm²を掛けて得られる。垂線のs座標に対しプロットするとp(s)の形は台形になり縦軸の単位はBq/cmである。同様に、**図5**のx軸と45度をなす直線s上の投影は三角形である。ガンマカメラが0度から30度、45度と回転して投影を収集すると、その強度分布は矩形、台形、三角形と変化する。

30度の台形p(s)内のRIは三角形1(a′b′b″)長方形(b″b′d′d″)、三角形2(d″d′c′)内のRIを合計した



頂点	(x,y) 座標系	(s,t) 座標系
a	(-10,-10)	$(-5(1+\sqrt{3}), 5(1-\sqrt{3}))$
b	(-10, 10)	$(5(1-\sqrt{3}), 5(1+\sqrt{3}))$
c	(10, 10)	$(5(1+\sqrt{3}), 5(-1+\sqrt{3}))$
d	(10,-10)	$(5(-1+\sqrt{3}), -5(1+\sqrt{3}))$

a′はaからs軸に下ろした垂線のs座標で、座標軸の回転の式

$s=x\cos\theta+y\sin\theta$にa座標の$x=-10$、$y=-10$、$\theta=30$を代入して

$$s=-10\cos30-10\sin30=-5(1+\sqrt{3})$$

b″はb座標の$x=-10$、$y=10$から

$$s=-10\cos30+10\sin30=5(1-\sqrt{3})$$

d″はd座標の$x=10$、$y=-10$から

$$s=10\cos30-10\sin30=5(-1+\sqrt{3})$$

c′はc座標の$x=10$、$y=10$から

$$s=10\cos30+10\sin30=5(1+\sqrt{3})$$

b′b″の長さは矩形の1辺20、$\theta=30$からb′b″$=\dfrac{20}{\cos30}=\dfrac{40}{\sqrt{3}}$

図4 矩形の30度方向への投影

ものである。sの範囲とp(s)は

$$-5(1+\sqrt{3})\leq s<5(1-\sqrt{3}) \qquad p_1(s)\ \frac{4}{\sqrt{3}}(s+5(1+\sqrt{3}))$$

$$5(1-\sqrt{3})\leq s<5(-1+\sqrt{3}) \qquad p_2(s)\ \frac{20}{\cos30}$$

$$5(-1+\sqrt{3})\leq s<5(1+\sqrt{3}) \qquad p_3(s)\ -\frac{4}{\sqrt{3}}(s+5(1+\sqrt{3}))$$

より、三角形a″b′b″内のRIは

$$\int_{-5(1+\sqrt{3})}^{5(1-\sqrt{3})} p_1(s)\,ds=\int_{-5(1+\sqrt{3})}^{5(1-\sqrt{3})}\frac{4}{\sqrt{3}}(s+5(1+\sqrt{3}))ds=\frac{200}{\sqrt{3}} \quad ①$$

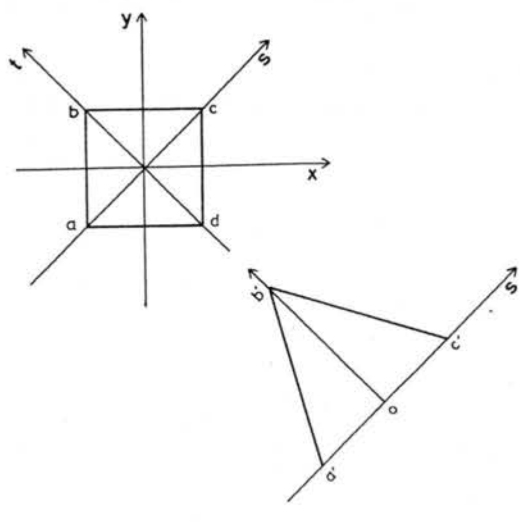
長方形b″b′d′d″内のRIは

$$\int_{5(1-\sqrt{3})}^{5(-1+\sqrt{3})} p_2(s)\,ds=\int_{5(1-\sqrt{3})}^{5(-1+\sqrt{3})}\frac{40}{\sqrt{3}}\,ds=\frac{400}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) \quad ②$$

三角形d″d′c′内のRIは

$$\int_{5(-1+\sqrt{3})}^{5(1+\sqrt{3})} p_3(s)\,ds=\int_{-5(-1+\sqrt{3})}^{5(1+\sqrt{3})}-\frac{4}{\sqrt{3}}(s-5(1+\sqrt{3}))ds=\frac{200}{\sqrt{3}} \quad ③$$

$f(x,y)$内のRI$=400\mathrm{Bq/cm^2}=\int p_1(s)ds+\int p_2(s)ds+\int p_3(s)ds$



頂　点	(x,y) 座標系	(s,t) 座標系
a	(-10,-10)	$(-10\sqrt{2}, 0)$
b	(-10, 10)	$(0, 10\sqrt{2})$
c	(10, 10)	$(10\sqrt{2}, 0)$
d	(10,-10)	$(0, -10\sqrt{2})$

図5 矩形の45度方向への投影

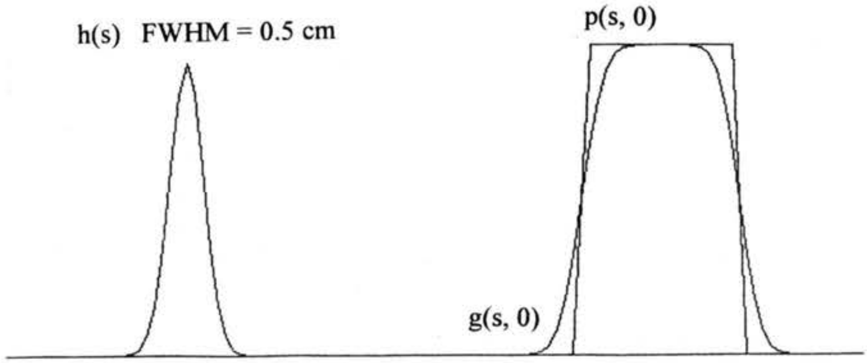


図6 矩形の0度方向への投影p (s,0)とぼけが加わった投影g (s,0) 半値幅 (FWHM) 0.5cmのガウス関数 (h (s)) によりぼかした場合。

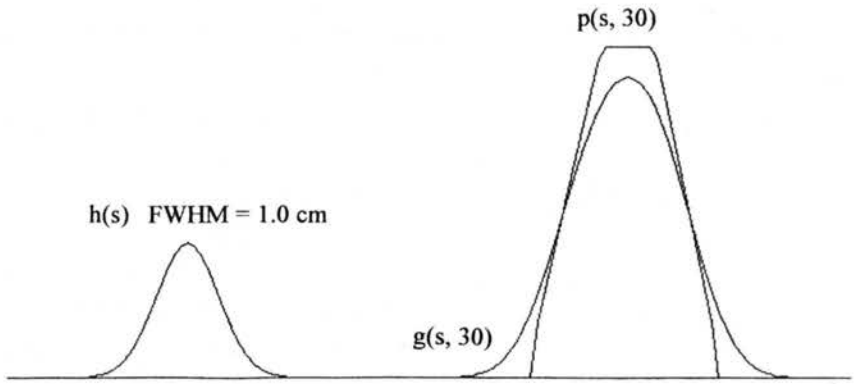


図7 矩形の30度方向への投影p (s,30)とぼけが加わった投影g (s,30) 半値幅1.0cmのガウス関数 (h (s)) によりぼかした場合。

積分の練習も兼ねて三角形、長方形内のRIを積分公式を用いて算出した。これらはもちろん三角形と長方形の面積の公式から求められるので確認する。

三角形a′b′b″と三角形d″d′c′の面積は底辺10cm、高さ$40/\sqrt{3}$ Bq/cmだから、この中に含まれるRIは

$$10\mathrm{cm} \times \frac{40}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Bq/cm} \times \frac{1}{2} = \frac{200}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Bq/cm^2} \qquad ①$$

長方形b″b′d′d″の面積は底辺$10(\sqrt{3}-1)$ cm、高さ$40/\sqrt{3}$ Bq/cmだから

$$10(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{cm} \times \frac{40}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Bq/cm} = \frac{400}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{Bq/cm^2} \qquad ②$$

$$① \times 2 + ② = 400\,\mathrm{Bq/cm^2}$$

このように、3つのp (s) の積分の和はf (x,y) 内のRIに等しい。

f (x,y) 内のRIは濃度A Bq/cm²に面積を掛けたものであるが、数式による表現ではf (x,y) についてxとyの2重積分になる。

$$f(x,y)\text{内のRI} = \int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (3)$$

ところで、f (x,y) は定数なので **(3) 式**の2重積分は、xに関する積分とyに関する積分の積に等しい。

$$\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} f(x,y)\,dx\,dy = A\int_{-10}^{10}dx\int_{-10}^{10}dy \qquad (4)$$

これは、積分の順序を変更し最初にyに関する積分を行い、次にxに関する積分を行い掛けても同じである。

$$\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} f(x,y)\,dx\,dy = A\int_{-10}^{10}dx\int_{-10}^{10}dy = A\int_{-10}^{10}dy\int_{-10}^{10}dx$$

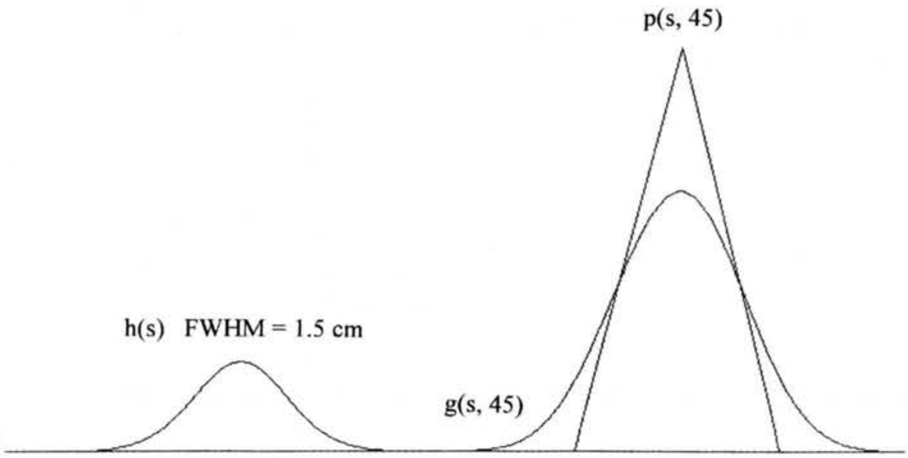


図8 矩形の45度方向への投影p (s,45) とぼけが加わった投影 g (s,45) 半値幅1.5cmのガウス関数 (h (s)) によりぼかした場合。

投影p(x)はf(x,y)のyに関する積分A $\int_{-10}^{10}dy$に相当する。

45度の三角形p(s)内のRIは三角形a′b′o、三角形ob′c′内のRIを合計したものである。sの範囲とp(s)は

$$-10\sqrt{2} \leq s < 0 \qquad p_1(s) = 2(s+10\sqrt{2})$$
$$0 \leq s < 10\sqrt{2} \qquad p_2(s) = -2(s-10\sqrt{2})$$

より、三角形a′b′o′内のRIは

$$\int_{-10\sqrt{2}}^{0} p_1(s)\,ds = \int_{-10\sqrt{2}}^{0} 2(s+10\sqrt{2})\,ds = 200$$

三角形ob′c′内のRIは

$$\int_{0}^{10\sqrt{2}} p_2(s)\,ds = \int_{0}^{10\sqrt{2}} -2(s-10\sqrt{2})\,ds = 200$$

30度の投影と同様、積分式を用いず三角形の面積からRIを求めると

$$\text{底辺}10\sqrt{2} \times \text{高さ}20\sqrt{2}\ \mathrm{Bq/cm} \times \frac{1}{2} = 200\mathrm{Bq/cm}$$

従って、

$$f(x,y)\text{内のRI} = 400\mathrm{Bq/cm^2} =$$

$$\int_{-10}^{10} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-10\sqrt{2}}^{0} p_1(s)\,ds + \int_{0}^{10\sqrt{2}} p_2(s)\,ds$$

もし、ガンマカメラの分解能が完全であれば、投影p(s)の形はこれまで計算した矩形、台形、三角形になる。実際の投影はガンマカメラの有限な分解能によってぼかされる。**図6**はf(x,y)を1辺の長さが2cmの矩形内に、RIが一様に分布するとした場合の0度方向の投影p(s,0)を示す。ガンマ線の吸収がないと仮定すればp(s,0)は矩形である。**図左**の曲線は半値幅(FWHM)が0.5cm、面積が1のガウス関数h(s)である。ガンマカメラの分解能をこのガウス関数で近似すると、p(s,0)はぼけてg(s,0)のような投影になる。g(s,0)はp(s,0)に比較し角の部分が丸みを帯び、裾野が広がっている。ぼけの程度は半値幅が大きくなるほど増加する。**図7**は30度方向の投影p(s,30)を、FWHM=1.0cmのガウス関数によりぼかした場合の投影g(s,30)である。**図8**は45度方向の投影p(s,45)を、FWHM=1.5cmのガウス関数によりぼかした場合の投影g(s,45)である。映像装置の有限な分解能により投影がぼける過程は、2つの関数p(s,0)とh(s)から別の関数g(s,0)を作る操作で畳込みあるいは重畳という。畳込みは画像処理や画像再構成において、重要な役割を果たす。

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧下さい。

複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。
本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、（社）学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（（社）学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先　　　　一般社団法人学術著作権協会
〒107-0052　東京都港区赤坂9-6-41　乃木坂ビル3F　FAX：03-3475-5619　　E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、（社）学術著作権協会に委託致しておりません。
直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan
One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO （Reproduction Rights Organisation）, please apply for the license to the RRO.
Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.
http://www.jaacc.org/
2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.
For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.
JAACC （Japan Academic Association for Copyright Clearance） is an official member RRO of the IFRRO （International Federation of Reproduction Rights Organisations）.
Japan Academic Association for Copyright Clearance （JAACC）
Address　9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan
E-mail　info@jaacc.jp　Fax: +81-33475-5619